Educación Matemática
Santillana
aliavi@prodigy.net.mx
ISSN (Versión impresa): 1665-5826
MÉXICO

2003
Ernesto Sánchez Sánchez
LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA Y LOS PROCESOS DE RECONFIGURACIÓN: UNA EXPERIENCIA EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA
Educación Matemática, agosto, año/vol. 15, número 002
Santillana
Distrito Federal, México
pp. 27-53

La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica

Ernesto Sánchez Sánchez

Resumen: En este artículo presentamos nuestras observaciones sobre la manera en que los estudiantes enuncian un conjunto de proposiciones geométricas y sus pruebas; actividades que formaron parte de un curso de geometría apoyado con el software de geometría dinámica Cabri-Géomètre. La investigación fue motivada por la preocupación de saber si las actividades en los ambientes de geometría dinámica mejoran las condiciones para el desempeño de los estudiantes en la demostración. Nuestra discusión se alimenta de conceptos y resultados tanto de Duval (1999) como de Balacheff (1987, 1999). En particular, del primero destacamos el concepto de *reconfiguración*, el cual nos proporciona una clave para explicar una de las posibles dificultades que no hacen tan fácil el tránsito de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales vía las actividades con Cabri-Géomètre.

Palabras clave: demostración, pruebas pragmáticas e intelectuales, reconfiguración.

Abstract: Our aim in this paper is to show how students wrote some statements issued from geometrical propositions and how they tried to prove them after they previously worked the propositions in activities with the software Cabri-Géomètre. We investigate if Cabri-Géomètre activities might improve a basement for a better performance on mathematical proof. Our analysis used theoretical categories from Balacheff's (1987, 1999) and Duval's (1999) work. Duval's concept of *reshaping* is highlighted which is a clue to explain some of the student's difficulties, particularly those concerning to the transit from empirical proof to intellectual proof with the aid of Cabri-Géomètre.

Key word: demonstration, pragmatic proof, intellectual proof, reshaping.

Fecha de recepción: julio de 2002.

INTRODUCCIÓN

El campo de la prueba matemática es muy complejo; llevar a cabo procesos de prueba con cierto nivel de formalidad, es decir, la producción de pruebas que Balacheff llama intelectuales, parece reservado a un selecto número de estudiantes y profesionales. Esta dificultad para tener acceso a la prueba matemática, aunada a la potencia de los procesos empíricos de validación que los recursos informáticos proporcionan, probablemente ha contribuido a alejar el objetivo sobre el aprendizaje de la prueba de los *currícula* de matemáticas de los niveles medios y superiores, con excepción de las carreras de matemáticas, donde la demostración es una práctica corriente.

Por otro lado, la presencia de los medios computacionales también ha llevado a algunos investigadores a plantearse el problema de saber si las posibilidades que proporcionan estos medios favorecen las condiciones para el aprendizaje de la prueba, de manera que ahora su aprendizaje pueda ser más accesible a estudiantes y profesionales (Hoyles y Jones, 1998; De Villiers, 1998). El presente estudio se inscribe en un proyecto de investigación que comparte este interés.

La problemática de las relaciones de la prueba y demostración con las geometrías dinámicas ha dado lugar a números especiales en dos revistas importantes: *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, núms. 1 y 2, 2000, e *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 6, núm. 3, 2001.

1. LA NATURALEZA DE LA ACTIVIDAD GEOMÉTRICA Y SUS PROCESAMIENTOS

LA ACTIVIDAD GEOMÉTRICA SE LLEVA A CABO EN DOS SISTEMAS: EL FIGURAL Y EL DISCURSIVO

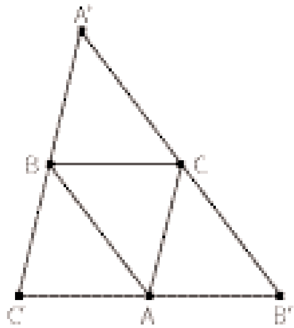
En opinión de Duval, la actividad geométrica escolar se realiza en dos sistemas de representación, el de las figuras y el del discurso. El primero permite representar visualmente los objetos geométricos y observar sus propiedades; el segundo, enunciar las definiciones, los teoremas y sus demostraciones. Los procesos productivos en geometría tradicionalmente se llevan a cabo de manera coordinada en ambos sistemas (Duval, 1999, p. 147). Es decir, para descubrir un resultado, para resolver un problema o para elaborar una demostración, es necesario apoyarse y realizar transformaciones en el registro de las figuras, así como, simultáneamente, hacer tratamientos en el nivel del discurso a través de la enunciación de definiciones, de descripciones y proposiciones y, con ellas, de la construcción de argumentos.

El procesamiento de las figuras

Las figuras cumplen una función heurística en la resolución de problemas de geometría, pero el ejercicio de esa función no se produce espontáneamente; requiere un entrenamiento consciente que permita al sujeto lograr una coordinación de diferentes maneras de aprehender las figuras. Duval (1995b, p. 143) señala que un dibujo puede ser cognitivamente aprehendido de cuatro maneras diferentes: aprehensión perceptiva, aprehensión secuencial, aprehensión discursiva y aprehensión operativa. Aunque los sujetos ponen en juego una interacción compleja de estas maneras de aprehender la figura en el proceso de resolución de un problema geométrico, la aprehensión operativa es la más productiva y admite y requiere procesamientos probablemente más complejos. La aprehensión operativa depende de varias transformaciones que se realizan en la figura, ya sea externamente (físicamente) o mentalmente. En particular, hemos encontrado que en la interpretación de la experiencia que describiremos más adelante, la operación que Duval (1999b) llama *reconfiguración* desempeña un papel importante.

La operación de reconfiguración es un tipo de aprehensión operativa que consiste en distinguir y reagrupar los elementos o subfiguras de una figura dada. Hay diferentes acciones que se pueden llevar a cabo en una reconfiguración; por ejemplo, en muchos problemas una figura puede contener las subfiguras útiles para obtener la solución; en esos casos, de lo que se trata es de distinguir esa figura del conjunto; en otros problemas se deben construir tales subfiguras con ayuda de trazos auxiliares. La utilidad de una subfigura puede ser doble o triple, es decir, un mismo objeto puede usarse una o varias veces simultáneamente. Para resolver el siguiente problema (Dupuis, 1978, citado en Duval, 1999b, p. 154), se necesita llevar a cabo una reconfiguración:

> En la siguiente figura, $\overline{A'C'}$ es paralelo $\overline{AC}$; $\overline{A'B'}$ es paralelo a $\overline{AB}$ y $\overline{B'C'}$ es paralelo a $\overline{BC}$. Probar que A es el punto medio de $\overline{B'C'}$.



La percepción inicial de la figura es la de un triángulo inscrito en otro; sin embargo, la solución del problema depende del reconocimiento de dos paralelogramos, a saber, □C′BCA y □ABCB′ para hacer este reconocimiento es necesario, en opinión de Duval, neutralizar la organización perceptiva que hace predominar los contornos "triángulo" sobre los contornos "cuadrilátero" y, por otra parte, ver separadas las unidades figurales que se recubren parcialmente.

El procesamiento discursivo

Para tener acceso a una figura desde un punto de vista geométrico, es necesario que la significación de algunos elementos de la figura y de algunas de sus relaciones sea establecida de antemano. La figura en sí misma no es suficiente para fijar las propiedades del objeto que se quiere representar en el dibujo; una mediana, por ejemplo, puede confundirse en algunas representaciones con una mediatriz o con una altura. "En geometría no hay dibujo que se represente por sí mismo, es decir, no hay dibujo sin leyenda" (Duval, 1999b, p. 159). Es necesario que haya indicaciones verbales para determinar el estatuto matemático de los objetos visuales, ya que el discurso indica un orden de recorrido de una figura o construcción y, por tanto, ayuda a distinguir el antecedente y el consecuente de la proposición que da cuenta de sus propiedades.

Las transformaciones que se realizan en la gráfica para destacar alguna propiedad tienen que enunciarse y con los enunciados es como se pueden aplicar transformaciones guiadas por operaciones lógicas. La investigación y solución de un problema de geometría se realiza en una estrecha articulación entre la figura y un conjunto de enunciados.

2. ¿CÓMO AFECTA LA COMPUTADORA LA ACTIVIDAD GEOMÉTRICA?

Las geometrías dinámicas

Los software de geometría dinámica están transformando significativamente el panorama de la enseñanza de la geometría. Aquí, nos referiremos al software de geometría llamado Cabri-Géomètre, el cual está constituido por objetos y relaciones que son formas virtuales o "concretas" de los objetos y relaciones de la geometría euclidiana; tales objetos pueden ser manipulados por el usuario con ayuda del *ratón*. Hay un conjunto de objetos primitivos (por ejemplo, punto, recta, círculo) y un conjunto de operadores que permiten construir nuevos objetos. Aquéllos y éstos pueden ser transformados con la función de "arrastre", la cual dejará invariantes las propiedades con las cuales fue definido el objeto.

Las actividades con Cabri permiten desarrollar enormemente los procesamientos figurales; en particular, la función de arrastre permite distinguir claramente entre dibujo y figura geométrica; el primero es un objeto singular que sólo se representa a sí mismo; la figura geométrica, en cambio, es el representante de una clase de objetos que comparten el conjunto de propiedades geométricas con el que se construyó la figura. Naturalmente son las figuras, y no los dibujos, las que tienen interés matemático. En las actividades geométricas escolares con lápiz y papel, se ha encontrado que la causa de ciertas dificultades de comprensión puede consistir en que el estudiante tome como referencia el dibujo y no la figura. El ambiente Cabri puede permitir superar definitivamente las dificultades surgidas de esta confusión.

Las figuras o construcciones hechas en Cabri se comportarán de acuerdo con las leyes de la geometría, es decir, reflejarán todas las consecuencias teóricas de las propiedades que las definen. Por ejemplo, si se define un triángulo y sus medianas, y luego se arrastra un vértice (o dos o tres sucesivamente) para transformar el triángulo, la serie de figuras, que siguen siendo triángulos, "arrastran" a las medianas manteniéndolas como tales, concretándose también en cada figura de esa serie las propiedades que se derivan de la teoría, por ejemplo, que las medianas son concurrentes, que se cortan en razón de dos a uno, etc. Por estas características, Cabri resulta ideal para explorar y descubrir resultados geométricos.

Pero, a diferencia de esta ampliación de posibilidades de los procesamientos figurales, las actividades con Cabri se liberan en gran medida de los procesamientos discursivos. En las actividades geométricas con lápiz y papel, en las interacciones entre la figura y el discurso, los procesamientos discursivos ejercen un control sobre las acciones que se llevan a cabo en las figuras. En cambio, en Cabri este control se ejerce mediante la posibilidad de la manipulación directa del objeto y las limitaciones que el software impone a las figuras. "Con la manipulación directa, estos procesos de interacción entre el usuario y el micro mundo ya no están basados en el uso del lenguaje simbólico; éste se evita al permitirse un acceso físico e inmediato a las formas concretas de las entidades abstractas" (Laborde y Laborde, 1995, p. 243).

3. LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA

PRUEBAS PRAGMÁTICAS Y PRUEBAS INTELECTUALES

Una gran parte de los problemas de geometría consiste en la elaboración de una prueba matemática. Conviene analizar el lugar que puede ir ocupando el problema de la prueba en el panorama de la enseñanza de la geometría cada vez más influido por el advenimiento de las geometrías dinámicas.

Al hablar de prueba es pertinente señalar las características del tipo de prueba al que nos referimos. Balacheff (1987, 1999) fue el primero en abordar el problema de la prueba en la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva en la que los procesos de prueba no se reducen a la elaboración de pruebas formales. En los diferentes niveles de su desarrollo, los sujetos llevan a cabo procedimientos matemáticamente aceptables para dar certeza a sus proposiciones, sin que necesariamente dichos procedimientos alcancen el rigor de las exigencias formales. Con base en esa idea, Balacheff distingue diferentes tipos de pruebas que agrupa en dos clases: las *pruebas pragmáticas* y las *pruebas intelectuales*. Las primeras son aquellas que se basan en acciones efectivas que concretan o llevan a cabo el contenido de una proposición; cuando esto no es posible, entonces la validación sólo puede ser intelectual. La producción de pruebas intelectuales requiere la expresión lingüística de los objetos; el lenguaje representa un papel crucial en la transición de pruebas empíricas a pruebas intelectuales.

En una primera etapa, los procesos de prueba que los estudiantes llevan a cabo para creer en una proposición y para convencer a los demás de su veracidad se basan en gran medida en la ostentación; en la presencia efectiva de los objetos y las acciones sobre ellos. Pero en las situaciones en la que no es posible el recurso de la ostentación, el estudiante recurrirá al lenguaje; sin embargo, en una primera instancia utiliza el *lenguaje de la familiaridad*; este lenguaje porta la marca del tiempo y la duración, también la marca de aquello de lo que trata y del contexto de su acción. El tránsito a las pruebas intelectuales exige la transformación del lenguaje de la familiaridad hacia un lenguaje funcional, ya no un lenguaje que sólo describa las acciones, sino un lenguaje que exprese los objetos, sus propiedades y relaciones. La creación de este lenguaje debe pasar por procesos de descontextualización y destemporalización.

Cuando nos referimos a *prueba matemática* o *demostración* estamos pensando en las pruebas intelectuales, en las que la prueba se realiza en gran medida en el nivel del discurso, aunque pueda estar fuertemente guiada por la figura y su procesamiento; vamos a ver que éste es precisamente el caso en las actividades que propusimos a los estudiantes, es decir, las pruebas solicitadas dependerán en gran medida del procesamiento de las figuras, pero su estatuto de prueba se puede alcanzar sólo en el nivel del discurso.

Por otro lado, las pruebas que son propiciadas por las actividades con Cabri son esencialmente pragmáticas y son diferentes a otras pruebas empíricas ingenuas por la posibilidad del "arrastre", que permite verificar las consecuencias de ciertas relaciones de objetos para una clase muy amplia de construcciones equivalentes. Nos preguntamos si esta posibilidad de las geometrías dinámicas para permitir llevar a cabo pruebas pragmáticas favorece el tránsito para la producción de pruebas intelectuales o si, por el contrario, representa un obstáculo o simplemente es independiente del desarrollo de esa habilidad.

El problema de investigación

Así pues, estamos interesados en la respuesta a la pregunta, ¿es posible que las actividades con la geometría dinámica influyan de manera positiva en el tránsito de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales?

En la medida en que es posible argumentar para apoyar hipótesis contrarias para responder a esta pregunta, conviene ir aclarando la cuestión produciendo observaciones empíricas, junto con los diseños experimentales correspondientes. Se puede argüir, por ejemplo, que las actividades con Cabri ayudan a mejorar el desempeño en la prueba, ya que, si suponemos que las actividades propician un mayor conocimiento de los objetos matemáticos, de sus propiedades y relaciones (es el caso cuando las actividades permiten distinguir entre dibujo y figura), entonces parece natural pensar que ese conocimiento se constituye en mejores condiciones para realizar una prueba. En Sánchez y Mercado (2002), señalamos que se pueden diseñar actividades con Cabri de manera que se delegue en el estudiante el problema de redactar las proposiciones descubiertas mediante la exploración. Sin ayuda de un soporte como el Cabri es difícil que la redacción de las proposiciones quede a cargo del estudiante; basta verificar que cualquier libro de problemas de geometría proporciona los enunciados de los teoremas y problemas. Estas prácticas en la redacción de las proposiciones podrían ayudar a desarrollar los procesamientos discursivos necesarios para la elaboración de pruebas.

Pero también podemos argumentar, en un sentido contrario, que las actividades con Cabri no fomentan naturalmente un mejoramiento en la prueba, ya que pueden prescindir de un lenguaje simbólico y, aunque esta propiedad ayuda a los estudiantes a evitar la dificultad del lenguaje en la solución de problemas, también les impide desarrollar la habilidad para llevar adelante procesamientos discursivos.

Así, creemos que lo mejor es tratar de encontrar escenarios en Cabri que prometan influir en algún sentido en el mejoramiento de la prueba y observar lo que pasa. Con esa idea, diseñamos la siguiente experiencia.

4. ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA

La pregunta es: ¿Es posible que las actividades con la geometría dinámica influyan de manera positiva en el tránsito de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales? Para avanzar en su respuesta organizamos el contenido de un curso que llevamos a cabo con estudiantes adultos que hacían una maestría en educación matemática. Dentro de las actividades que diseñamos para el curso, elegimos un conjunto de seis actividades que utilizamos como dispositivo experimental; esas seis actividades las presentamos al final como apéndice (excepto las actividades 1 y 2 que presentamos en el cuerpo de este artículo). El mismo dispositivo lo utilizamos en un taller con estudiantes de bachillerato, los resultados de éste se encuentran en el informe de Sánchez y Mercado (2002). Aquí estamos considerando los resultados de la exploración con el grupo de adultos.

El contenido del curso para este grupo estuvo formado por temas de geometría: congruencia, semejanza y círculo. Los temas se trabajaban alternadamente, algunas veces con problemas para explorar con Cabri, otras veces con problemas de prueba para resolver en el pizarrón y con lápiz y papel; se trataba de asegurar que las proposiciones fueran exploradas de antemano con el software, antes de que se llevara a cabo la prueba. Se insertaron en el curso sesiones para discutir algunos aspectos lógicos de una demostración: la estructura de la proposición condicional y los esquemas de las inferencias básicas, instanciación, *modus ponens, modus tolens,* contrapositiva y reducción al absurdo.

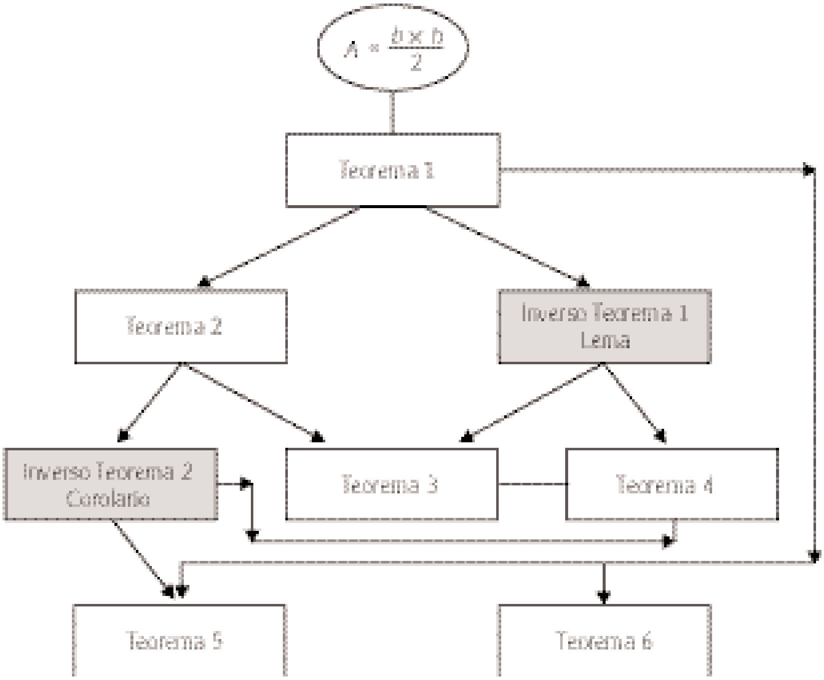
Participaron en el curso 12 estudiantes de diversas formaciones profesionales (maestros, ingenieros y matemáticos). Presupusimos que los estudiantes adultos estarían en mejores condiciones de comprender el sentido de una prueba matemática y, por tanto, de tener mejores resultados en la elaboración de pruebas que los que tendrían los adolescentes. Esto nos podría abrir la posibilidad de tener casos que lograran revelarnos trayectorias que llevan de las exploraciones prácticas a la elaboración de una prueba. Estos estudiantes, en general, tenían poca habilidad para elaborar demostraciones geométricas, pero más madurez que los estudiantes adolescentes para alcanzar logros en el dominio de la prueba durante el curso.

Como se mencionó, elegimos un conjunto de seis tareas específicas para explorar detenidamente la manera en que los estudiantes elaboraban una prueba después de, o simultáneamente a, las exploraciones de las proposiciones correspondientes con ayuda del software. Las características de las actividades que se propusieron son las siguientes:

a) Cada actividad le proponía al estudiante realizar exploraciones que le permitieran ver una propiedad geométrica relacionada con las áreas de los triángulos obtenidos por medio del trazo de una o más medianas. Cada actividad correspondía a un teorema.
b) Las proposiciones derivadas de las actividades forman un sistema de proposiciones lógicamente relacionadas (véase el apéndice 2).
c) Los antecedentes para realizar las pruebas se reducen a la fórmula del área de un triángulo (base × altura/2), a las propias proposiciones del sistema y a dos proposiciones más que se derivan de las proposiciones.

El esquema de las relaciones entre las proposiciones respecto a cómo pueden utilizarse unas para demostrar las otras es el que se presenta en el diagrama 1; las cajas sombreadas representan proposiciones que no correspondían a alguna de las actividades, sino que el estudiante debía formular para facilitar las pruebas de las proposiciones surgidas de la actividad (las pruebas se encuentran en el apéndice 2).

Cada tarea consistía en seguir algunas instrucciones para realizar una construcción en Cabri en la que tenían que medir algunas áreas y luego mover ele-



mentos independientes para arrastrar la figura y observar invariantes. A continuación, se pedía al estudiante que formulara la proposición que se derivaba de la exploración realizada y, finalmente, se le pedía que elaborara una prueba.

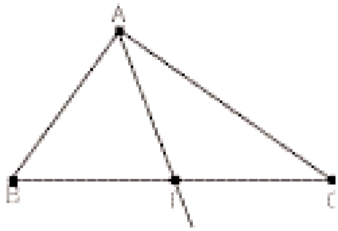
Nos detendremos a analizar las pruebas de los teoremas 1 y 2, ya que su análisis es suficiente para argumentar un punto importante de la investigación que reportamos. No hacemos un análisis semejante de los teoremas restantes para no extender demasiado la exposición; no obstante, los enunciados y las pruebas de las otras proposiciones se presentan en un apéndice.

La primera actividad se plantea de la siguiente manera:

ACTIVIDAD 1

- Trazar un triángulo, etiquetar los vértices con A, B, C.
- Marcar el punto medio del segmento BC, llamarlo I; trazar la mediana AI.
- Definir los triángulos ΔAIB y ΔACI.
- Obtener las áreas de los Δtriángulos ΔAIB y ΔACI.

- Mover los vértices A, B y C y observar lo que ocurre con las áreas obtenidas.



Formula una *conjetura* sobre tu observación y escribe la prueba correspondiente:

La actividad debe dar origen a una proposición como la siguiente:

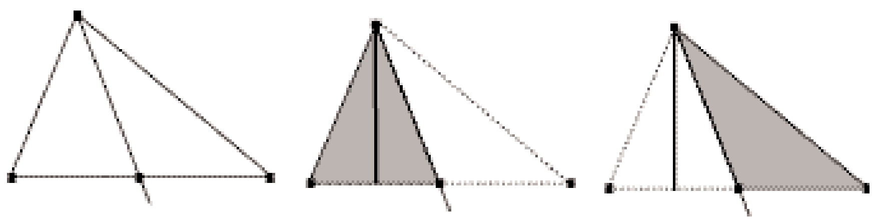
Una mediana de un triángulo divide a éste en dos triángulos de áreas iguales.

Pero también, la proposición puede formularse en términos de la simbología sugerida en las instrucciones de la actividad, en ese caso la forma condicional parece conveniente:

Si en un triángulo ΔABC se traza la mediana AI, donde I es el punto medio de BC, entonces: área (ΔAIB) = área (ΔACI)

Se esperaba que los estudiantes enunciaran el teorema de manera más o menos semejante a alguna de estas formas.

La clave de la prueba consiste simplemente en la percepción de que los triángulos que se forman al dividir el triángulo original con la mediana comparten su altura con la altura del triángulo original; las siguientes figuras nos muestran el procesamiento figural que era necesario llevar a cabo:



El procesamiento discursivo puede realizarse de muchos modos, pero el más cómodo es el que retoma la gráfica y la notación simbólica sugerida en el texto de la actividad. Por ejemplo:

Demostración:

Sea el triángulo ΔABC y el punto I el punto medio del segmento BC.
La mediana AI forma los triángulos ΔABI y ΔAIC.
Considérese la altura PA del triángulo ΔABC, donde P es el pie de la altura. PA también es altura de los triángulos ΔABI y ΔAIC. La base del primero respecto a esa altura es BI y la base del segundo respecto a la misma altura es IC, Pero como BI = IC, se deduce de $BI \times AP = IC \times AP$ que área (ΔABI) = área (ΔAIC)■

Podemos notar que el tratamiento discursivo de esta prueba se revela como una descripción del tratamiento figural y aunque la prueba se lleva a cabo fundamentalmente en el registro de las figuras, la función del discurso se puede apreciar en el momento en que hay que distinguir entre la anterior proposición y su inversa.

En el diagrama de la relación lógica de los teoremas que se mostró arriba, se puede observar que para probar las proposiciones 5 y 6 se requerirá el teorema inverso al teorema 1. Conviene señalar que aunque la clave de la prueba del problema inverso sigue siendo la misma que en la proposición directa, el procesamiento discursivo debe ser modificado. Es decir, en el nivel del procesamiento figural no hay nada que modificar, excepto que se deben recorrer las figuras de manera algo distinta, diferencia a la que es sensible el procesamiento discursivo.

ACTIVIDAD 2

- Traza un triángulo ΔABC (etiqueta los vértices).
- Marca el punto medio del segmento BC (llámalo M).
- Traza el rayo AM.
- Traza la recta perpendicular a AM que pase por el vértice B.
- Define la intersección de AM con la perpendicular anterior, llámalo P_1.
- Traza la recta perpendicular a AM que pase por el vértice C.
- Define la intersección de AM con la perpendicular anterior, llámalo P_2.
- Oculta las rectas perpendiculares BP_1 y CP_2.

- Traza los segmentos BP_1 y CP_2.
- Señala las longitudes de los segmentos BP_1 y CP_2.
- Arrastra los vértices A, B, C y observa lo que ocurre con las longitudes de estos segmentos.

(Se presenta una figura de la situación.)

Formula y prueba la conjetura correspondiente a tus observaciones.

La segunda actividad debe derivar en una proposición que se puede formular de diversos modos, unas veces en términos de perpendiculares, otras de distancias o de alturas. De cualquier manera, parece inevitable utilizar una figura y notación simbólica; nuevamente lo más económico es utilizar la sugerida en las instrucciones de la actividad. Veamos algunas posibles formulaciones:

- *Considere el triángulo ΔABC y la mediana AM, donde M es el punto medio de BC.*
- *El segmento perpendicular a la mediana AM que va del vértice B a la recta AM es congruente al segmento perpendicular a AM que va del vértice C a la recta AM.*

O, en lugar de estas dos últimas líneas:

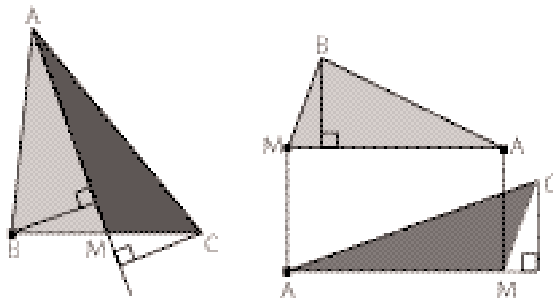
- *La distancia del vértice B a la mediana AM es igual a la distancia del vértice C a AM.*

O también,

- *La altura del triángulo ΔABM que pasa por B es congruente con la altura del triángulo ΔAMC que pasa por C.*

Esperábamos que los estudiantes hicieran la prueba de esta proposición utilizando la proposición 1, probablemente ya demostrada por ellos mismos. La clave de una prueba tal se basaría en el reconocimiento de que los segmentos cuya igualdad se quiere probar son las alturas de dos triángulos con la misma base e igual área.

La prueba puede basarse en la observación de que los triángulos ΔBMA y ΔMCA tienen igual área por la proposición 1. Después, se debe percibir que los dos triángulos tienen una base común y que las alturas con pie en esa base son las alturas cuya igualdad se debe probar.

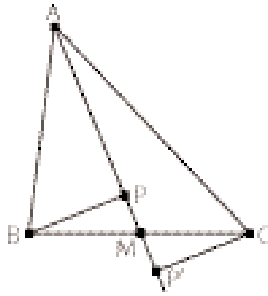


Debido a la difundida costumbre de identificar la base de un triángulo con el lado que se presenta en forma horizontal y, entonces, reconocer sólo la altura vertical, el procesamiento figural que se requiere en este problema para encontrar la clave de la demostración se puede representar como las transformaciones señaladas en las figuras de arriba, es decir, el reconocimiento de los dos subtriángulos de áreas iguales y su reacomodo (traslaciones y rotaciones) de manera de poner en evidencia los elementos en juego, las bases y alturas de cada subtriángulo. No queremos decir que los estudiantes que resuelven el problema mediante ese reconocimiento lleven a cabo exactamente esas transformaciones (física o mentalmente) de la misma manera que las representamos, más bien, lo que queremos decir es que el problema exige alguna manera de reconfiguración cuyo costo de tratamiento puede ser más o menos equivalente al indicado por nosotros.

Respecto al procesamiento discursivo, como en el caso anterior, toma la forma de una descripción del tratamiento figural. Nuevamente debemos señalar que el recurso de la figura y de la notación simbólica está sugerido por las instrucciones de la actividad:

Sea el triángulo ΔABC y M el punto medio de BC.

Sea P el pie de la perpendicular al segmento AM que pasa por B; sea P′ el pie de la perpendicular al segmento AM que pasa por C.



Puesto que la base opuesta al vértice B del triángulo ΔABM es común con la base opuesta al vértice C del triángulo ΔAMC, y dado que el área de ambos triángulos es la misma por el Teorema 1, se tiene que

$$(AM \times BP)/2 = \text{Área } (ABM) = \text{Área } (AMC) = (AM \times CP')/2, \text{ es decir:}$$

$$\frac{AM \cdot BP}{2} = \frac{AM \cdot CP¢}{2}$$

de donde $BP = CP'$ ■

5. RESULTADOS

A continuación, expondremos algunas observaciones relevantes en relación con los datos que obtuvimos. Nos basamos en las producciones escritas que los estudiantes realizaron en las actividades mencionadas arriba, las cuales se presentan en el apéndice 1. En el cuadro 1 se registran los puntajes que asignamos a la escritura de las proposiciones que se derivaban de las actividades. En el cuadro 2, las puntuaciones asignadas a la producción de las pruebas.

Asignamos el valor 2 a la escritura de enunciados correctos y pruebas aceptables; el valor 1 a los enunciados que reflejan un entendimiento de la proposición de que se trata y a las pruebas que prefiguran la prueba correcta, pero que adolecen de alguna falta; finalmente, asignamos el valor 0 a los enunciados que no expresan la idea de la proposición, ya sea porque el estudiante no entendió el contenido de la proposición, ya sea por dificultades para su redacción; también

Cuadro 1 Puntajes asignados a los enunciados producidos por los estudiantes después de las actividades

		Estudiante												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Pregunta	1	2	2	2	2	2	2	1	2	2	0	0	0	17
	2	2	2	2	2	1	2	2	2	0	1	0	0	16
	3	2	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	6
	4	2	0		1	1	0	1	0	0	0	0	0	5
	5	1	2	2	1		2	1	0	1	1	0	0	11
	6	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	21
	Total	11	10	8	8	8	8	7	6	5	3	2	0	

Cuadro 2 Puntajes asignados a las pruebas producidas por los estudiantes

		Estudiante												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Pregunta	1	2	2	2	2	2	2	2	1	2	0	0	0	17
	2	2	2	1	2	2	2	2	0	0		0	0	13
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1				0
	4	2			0	0		2	0	0				4
	5		0	0					0	2				2
	6				0	2		0	0	1	0			3
	Total	6	4	3	4	6	4	6	1	6	0	0	0	

asignamos el valor 0 a las pruebas incorrectas; finalmente, una celda vacía significa que no hubo intentos por responderla.

Podemos observar en el cuadro 1 que los enunciados correspondientes a las actividades 1, 2 y 6 fueron fáciles de redactar. Por el contrario, los correspondientes a las actividades 3 y 4 resultaron más difíciles. Probablemente la razón es que los antecedentes de estos últimos son más complejos y exigen mayor actividad discursiva.

Los resultados globales nos indican un desempeño muy bajo en la elaboración de las pruebas. A continuación, destacaremos algunas observaciones relativas tanto a la redacción de los enunciados, como a las pruebas intentadas.

Observamos en varios alumnos una insensibilidad para distinguir entre una proposición directa y su inversa, es decir entre $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$; esta situación se manifestó de dos maneras, una en la formulación de la proposición inversa en lugar de la directa que se desprende de la actividad 3; por ejemplo:

> (5, 3): Si ABC es un triángulo cualquiera y M es un punto en el interior del triángulo, [sea] *l* la semirrecta que parte de un vértice del triángulo y pasa por el punto M y X es el punto medio de intersección de esta semirrecta con el lado del triángulo, entonces los triángulos formados por ABM y AMC son iguales.
>
> (3, 3): Para todo triángulo (cuyos vértices son ABC), si existe un punto M dentro del triángulo tal que M está en la mediana, entonces las áreas de los triángulos (A_1 y A_2) con vértices M y otros dos vértices del triángulo son iguales.
>
> (8, 3): Sí, siempre y cuando [M] se encuentre sobre la mediana AX del triángulo ABC. La conjetura es: X debe ser el punto medio de BC para que $\Delta ABM = \Delta ACM$.

La otra manera en la que hubo sustitución de una proposición por su inversa ocurrió en algunos de los intentos por utilizar proposiciones ya probadas del mismo sistema. Por ejemplo, analicemos la siguiente "prueba" a la proposición 3:

> (1, 3) Como el área de $\Delta ABM \cong \Delta AMC$ son iguales (por construcción) y además las alturas del ΔABM y ΔAMC desde B [y desde C] son iguales, entonces por las actividadades 1 y 2, AM está sobre la mediana del triángulo ABC. Proyectando AM, se tiene que intersecar a BC en X, siendo X punto medio (definición de mediana).

Ni la proposición 1 ni la 2 tienen como antecedente la igualdad de áreas, ni tampoco la igualdad de alturas, la estudiante sugiere que, en esas condiciones, puede aplicar las proposiciones 1 y 2 y obtener como resultado que AM está sobre la mediana, pero ninguna de esas proposiciones tiene como consecuencia que una recta resulte ser mediana. Pero si pensamos en las proposiciones inversas de 1 y 2, esa deducción se vería más plausible. De este análisis suponemos que la estudiante está pensando en esas proposiciones inversas (o quizá en las bicondicionales) como las proposiciones derivadas de las actividades 1 y 2.

Por otro lado, nos llamó la atención el que algunos estudiantes conserven elementos irrelevantes del contexto de aplicación de las tareas. De manera más concreta, hay dos tipos de respuesta que nos indican que intervienen elementos contextuales en sus respuestas, uno es el uso de expresiones de términos "dinámicos" que nos recuerdan que el estudiante actuó en un ambiente Cabri, por ejemplo:

> (10, 1) Al generar una mediatriz [quiere decir *mediana*] se divide al triángulo en dos áreas...
>
> (10, 3) Si se quiere dividir un triángulo en 3 áreas iguales teniendo un punto móvil, sobre una semirrecta...
>
> (6, 4) Podemos decir que DX = XC, aun moviendo cualquier vértice del cuadrilátero.

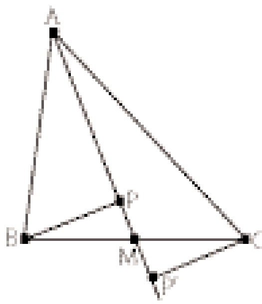
En el siguiente caso vemos que el estudiante no se libera de las condiciones particulares que impone el medio de exploración:

> (9, 3) Cuando las áreas de los triángulos ΔABM y ΔACM casi son iguales, las longitudes BX y XC casi son iguales, es decir, el punto X se acerca mucho al punto medio.

El uso del "casi" es un reflejo de que en el software no se puede hacer *a mano* que algunos objetos tengan una medida exacta preestablecida.

Otra manifestación en la que podemos ver que algunos estudiantes se apoyan en el contexto es cuando enuncian de manera incompleta algunas proposiciones, sobre todo, cuando el antecedente requiere una descripción más elaborada (actividades 4 y 5); en estos casos, es probable que el estudiante asuma que el instructor sabe de qué se está hablando y, entonces, no considera indispensable exponer toda la proposición.

Un comportamiento que no esperábamos cuando emprendimos esta investigación, probablemente con cierta ingenuidad, es que hubiera tan pocos esfuerzos, y de ellos prácticamente ningún éxito, para relacionar las proposiciones de la manera en que previmos en el análisis *a priori* de las tareas. En los pocos intentos que hubo, la conexión no era apropiada. En el cuadro 2 podemos observar que en las pruebas de las proposiciones 1 y 2, los estudiantes alcanzaron mayor éxito, mientras que sólo en tres de la otras proposiciones hubo éxito. Pero las pruebas correctas de la proposición 2 no se obtuvieron relacionándola con la proposición 1; las pruebas de todos los que la resolvieron adecuadamente se alcanzaron probando que los triángulos pequeños formados por las alturas trazadas con medio lado del triángulo y un pedazo de mediana eran congruentes, es decir, probando que $\Delta MPB \cong \Delta MP'C$ en la siguiente figura. Prueba que se basa en el reconocimiento de que BP es paralela a P′C.



No es extraño que los estudiantes hayan visto con mayor facilidad la congruencia de los triángulos ΔMPB y $\Delta MP'C$ que la igualdad de las áreas de los triángulos ΔMAB y ΔMCA, y la base común AM. Una razón por la cual pudo ocurrir así es que el segundo procedimiento exigía una actividad de reconfiguración o, en todo caso, una reconfiguración más compleja, por ejemplo, para ver la base como base horizontal (como se acostumbra) se requiere hacer una rotación de la figura. En cambio, los triángulos ΔMPB y $\Delta MP'C$ son más evidentes, ya que éstos tienen como elementos los segmentos cuya igualdad está en juego y no es necesario reacomodarlos para ver las relaciones de congruencia. El reconocimiento del paralelismo tampoco requiere reacomodos.

6. CONCLUSIONES

En esta investigación nos preguntamos si las actividades con Cabri pueden ayudar a los estudiantes a elaborar pruebas intelectuales y cómo. Después de las actividades que hemos propuesto y los resultados obtenidos, no encontramos argumentos para responder afirmativamente la pregunta. Por supuesto que no podemos afirmar, ni siquiera modulando la afirmación, que las geometrías dinámicas no pueden de ningún modo abrir una vía a la demostración. Es casi seguro, como suelen ser las respuestas en los complejos problemas sociales, que la respuesta o respuestas a esa pregunta no sean en términos de todo o nada. Más bien, deberemos formular respuestas relativas a muchas situaciones concretas antes de encontrar una explicación general. Así, la respuesta a nuestra pregunta debe estar ligada a la situación experimental concreta que elaboramos; en ésta encontramos que no hubo una aparente contribución de las actividades realizadas con el software de manera que los estudiantes pudieran establecer mejor las pruebas solicitadas.

Pero el recorrido nos ha indicado en qué consiste uno los problemas importantes que impiden que las actividades con Cabri no se traduzcan en un avance en las actividades de prueba. Nuestra opinión es que Cabri amplía las posibilidades de los estudiantes para hacer procesamientos figurales y también evita que haya confusiones entre dibujo y figura. Ahora bien, es posible que Cabri no contribuya al desarrollo de procesamientos discursivos; sin embargo, para el caso que nos ocupa, al parecer las limitaciones para llevar a cabo procesos discursivos no son las que impidieron que los estudiantes llevaran a buen término las pruebas. En efecto, el análisis de las demostraciones posibles a las proposiciones nos muestra que la clave de la prueba descansa en procesamientos figurales, pero estos procesamientos implican una reconfiguración, y este tipo de tratamiento no se favorece con Cabri, no lo favorece al menos con las actividades que llevaron a cabo los estudiantes con el curso.

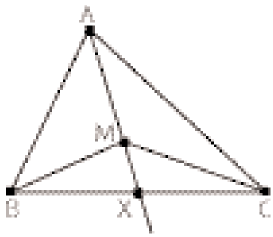
Esta observación sugiere que es importante analizar con mayor detenimiento los teoremas que requieren operaciones de reconfiguración y diseñar actividades que propicien llevarlas a cabo.

APÉNDICE 1. ACTIVIDADES UTILIZADAS EN LA EXPERIENCIA

ACTIVIDAD 3

- Trazar un triángulo, etiquetar los vértices con A, B, C y elegir un punto M en el interior del triángulo; crear los triángulos ΔABM y ΔACM y adjuntar sus áreas; construir la semirrecta AM, nombrar con X a la intersección de AM con BC. Adjuntar las medidas de los segmentos BX y XC.
- Mover el punto M hasta lograr que las áreas de los triángulos ΔABM y ΔACM sean iguales o casi iguales. ¿Qué se puede decir de la posición de X?

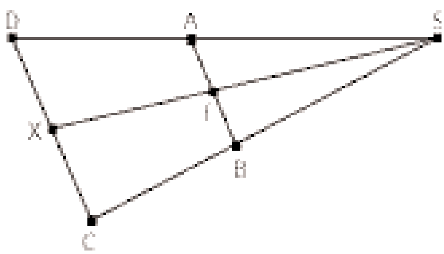
- ¿Se pueden encontrar otras posiciones de M para las cuales las áreas son iguales? ¿Qué conjetura puedes formular para la posición de X?
- Dibujar la altura de ΔABM desde B y la altura del ΔAMC desde C. Establecer que estas alturas son iguales.
- Demostrar que X es el punto medio de BC.



Formula y prueba la *conjetura* realizada en esta práctica.

ACTIVIDAD 4

- Construir un trapecio ABCD tal que AB || DC. Tener cuidado de que se puedan desplazar los vértices A, B, C y D, y que el cuadrilátero ABCD siga siendo trapecio.
- Denotar con S el punto de intersección de los lados no paralelos del trapecio y con I el punto medio de AB. Llamar X a la intersección del rayo SI con el segmentos DC y medir DX y XC. Arrastrar los vértices A, B, C, y D. ¿Qué se puede conjeturar?
- Establecer, por una parte que los triángulos SIA y SIB tienen la misma área; por otra que los triángulos SXC y SXD tienen la misma área.

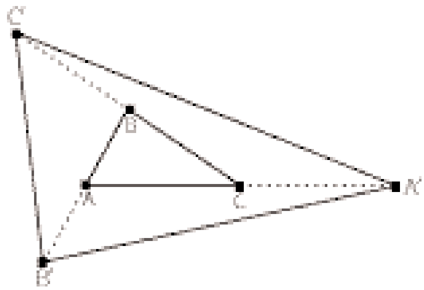


Formula y prueba la *conjetura* correspondiente.

ACTIVIDAD 5

Sea ΔABC un triángulo cualquiera y:
A' el simétrico de A respecto a C,
B' el simétrico de B respecto a A;
C' el simétrico de C respecto a B.
Comparar las áreas de los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$.

Formula y prueba la *conjetura* correspondiente.



ACTIVIDAD 6

Las tres medianas de un triángulo determinan un conjunto de seis triángulos con la misma área. Verificar este resultado en Cabri. Enuncia la proposición con mayor precisión y construye una prueba.

APÉNDICE 2: TEOREMAS CORRESPONDIENTES A LAS ACTIVIDADES

TEOREMA 2

Considere el triángulo ΔABC y la mediana AM, donde M es el punto medio de BC. La altura del triángulo ΔABM que pasa por B es congruente con la altura del triángulo ΔAMC que pasa por C.

Demostración: Puesto que la base opuesta al vértice B del triángulo ΔABM es común con la base opuesta al vértice C del triángulo ΔAMC, y puesto que el área de ambos triángulos es la misma por el Teorema 1, se deduce que BP = CP′ donde P es el pie de la perpendicular a AM que pasa por B y P′ es el pie de la perpendicular a AM que pasa por C■

Corolario. *Sea un triángulo ΔABC y AM una de sus medianas. Sea X cualquier punto en la mediana. Entonces: área (ΔABX) = área (ΔAXC).*

Demostración: La altura del ΔABM que pasa por el vértice B coincide con la altura del triángulo ΔABX que pasa por el mismo vértice; análogamente, la altura del triángulo ΔAMC que pasa por el vértice C coincide con la altura del ΔAXC que pasa por el mismo vértice. Se sabe, por el teorema 2, que la altura de ΔABM que pasa por el vértice B es igual a la altura de ΔAMC que pasa por C, y además ΔABX tiene en común la base AX con ΔAXC, de donde se deduce que: área (ΔABX) = área (ΔAXC)■

TEOREMA 3

Considere un triángulo ΔABC. Sea M un punto interior al triángulo tal que área (ΔAMB) = área (ΔAMC). Entonces el rayo AM interseca al segmento BC en su punto medio.

Lema 1. *Si en un triángulo ΔABC un segmento que parte de un vértice al lado opuesto divide al triángulo en dos triángulos con áreas iguales, entonces dicho segmento es una mediana.*

Demostración del Lema 1: Sea AX el segmento que divide al ΔABC en dos triángulos con la misma área (el argumento es el mismo para cualquiera de los otros dos vértices); donde X es un punto en el segmento BC.

Es decir, por hipótesis se tiene lo siguiente: área (ΔABX) = área (ΔAXC).

Considérese la altura h de ΔABC. Obsérvese que h es altura de ΔABX cuya base correspondiente es el segmento BX; h también es altura de ΔAXC, cuya base correspondiente es XC. Entonces:

$$\frac{h \cdot BX}{2} = \text{área } (\Delta BAX) = \text{área } (\Delta XAC) = \frac{h \cdot XC}{2}$$

de donde BX = XC y X es punto medio de BC, y por tanto, AX es una mediana■

Demostración del Teorema 3: Como área (ΔABM) = área (ΔAMC) y ambos triángulos tienen en común el segmento AM, h_1 es igual a h_2, donde h_1 es la altura de ΔABM que pasa por B y h_2 es la altura de ΔAMC que pasa por C. Pero h_1 también es la altura de ΔABX que pasa por B, y h_2 es la altura de ΔAXC que pasa por C. Entonces área (ΔABX) = área (ΔAXC) y por el lema 1, X es punto medio de BC y AX mediana del ΔABC■

TEOREMA 4

Sea un trapecio □ABCD, *con* AB || DC. *Sea S el punto de intersección de las prolongaciones de los lados no paralelos del trapecio (es decir,* S = AD∩BC*) y sea I el punto medio de* AB. *Entonces el segmento* SI *es mediana de* ΔABS. *Sea* X *el punto de intersección del rayo* SI *con el segmento* DC. *Entonces el segmento* SX *es mediana de* ΔDSC.

Demostración: Supongamos que el segmento AB es más pequeño que el segmento DC, de manera que S está en el semiplano definido por AB que no contiene los puntos D y C. Por el teorema 1, se tiene que área (ΔASI) = área (ΔISB). Consideremos los triángulos: ΔDAI y ΔCIB; la altura de ΔDAI que pasa por D es congruente con la altura de ΔCIB que pasa por C. Como las bases AI e IB son congruentes, entonces área (ΔDAI) = área (ΔCIB). Entonces se tiene que área (ΔDSI) = área (ΔCSI); con ello se cumplen las hipótesis del teorema 3. Por lo tanto, X es punto medio y, en consecuencia, área (ΔDSX) = área (ΔSXC).

Si AB es mayor que CD, probaremos que área (ΔDXS) = área (ΔCXS) y, con este resultado, aplicamos el Lema1, para obtener que X es el punto medio de DC.

Para probar que área (ΔDXS) = área (ΔCXS) se debe observar que los cuadriláteros □AIXD y □BIXC tienen una altura igual respecto a las bases AI y IB, por ser AB y DC paralelos; además AI = IB por ser I punto medio de AB. Luego área (□AIXD) = área (□IXC).

Puesto que área (ΔDXS) = área (ΔAIS) – área ($\square$AIXD) y área (ΔCXS) = área (ΔBIS) – área ($\square$BIXC), y área (ΔAIS) = área (ΔBIS), se deduce que área (ΔDXS) = área (ΔCXS) y de esto que X es punto medio de DC.

Teorema 5

Considere un triángulo ΔABC y sea A' el simétrico de A respecto a C; B' el simétrico de B respecto a A, y C' el simétrico de C respecto a B; entonces

$$\text{área } (\Delta A'B'C') = 7 \times \text{área } (\Delta ABC).$$

Demostración: Se traza la recta auxiliar BA' para formar $\Delta BA'B'$. En este triángulo, el segmento AA' es una mediana, pues A es punto medio del segmento BB', de donde área ($\Delta ABA'$) = área ($\Delta A'B'A$). Ahora observemos el $\Delta ABA'$; el segmento BC' es mediana de dicho triángulo ya que C es punto medio de AA', de donde

$$\text{área } (\Delta ABC) = \text{área } (\Delta CBA') \text{ y por tanto área } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} (\Delta ABA')$$

y entonces:

$$\text{área } (\Delta A'B'A) = 2 \times \text{área } (\Delta ABC).$$

De forma análoga se encuentran las siguientes igualdades:

$$\text{área } (\Delta B'C'B) = 2 \times \text{área } (\Delta ABC)$$
$$\text{área } (\Delta C'A'C) = 2 \times \text{área } (\Delta ABC)$$

Entonces:

$$\text{área } (\Delta A'B'C') = \text{área } (\Delta A'B'A) + \text{área } (\Delta B'C'B) + \text{área } (\Delta C'A'C) + \text{área } (\Delta ABC) = 7 \times \text{área } (\Delta ABC) \blacksquare$$

Teorema 6

Las medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos con la misma área.

Demostración: Sea el triángulo ΔABC, sean P, Q, R los puntos medios de los lados AB, BC, CA y sea M la intersección de las medianas.

Considere los triángulos ΔABM, ΔMBC y ΔCAM y sus medianas respectivas MP, MQ, MR. del teorema 1 se deducen las siguientes igualdades:

$$\text{área } (\Delta APM) = \text{área } (\Delta MPB)$$
$$\text{área } (\Delta MBQ) = \text{área } (\Delta QCM)$$
$$\text{área } (\Delta MCR) = \text{área } (\Delta RAM)$$

Falta probar las siguientes tres igualdades para completar la prueba:

$$\text{área } (\Delta MPB) = \text{área } (\Delta MBQ);$$
$$\text{área } (\Delta QCM) = \text{área } (\Delta MCR) \text{ y}$$
$$\text{área } (\Delta RAM) = \text{área } (\Delta APM)$$

Probaremos primero que área (ΔMPB) = área (ΔMBQ).

Del corolario del Teorema 2 se deduce que área (ΔABM) = área (ΔMBC).

Sabemos que área $(\Delta ABM) = 2 \times$ área (ΔMPB) y área $(\Delta MBC) = 2 \times$ área (ΔMBQ), de donde:

que $2 \times$ área $(\Delta MPB) = 2 \times$ área (ΔMBQ) y entonces: que área (ΔMPB) = área (ΔMBQ).

De manera análoga se prueba para las otras parejas■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (1987), "Processus de preuve et situations de validation", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 18, pp. 147-176.

—— (1999), "Apprendre la preuve", en J. Sallantin y J.J. Szczeniarz (eds.), *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle,* París, PUF, pp. 197-236.

De Villiers, M. (1998), "An Alternative Approach to Proof in Dynamic Geometry", en R. Lehrer y D. Chazan (eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space,* Erlabaum, Estados Unidos.

Duval, R. (1995), "Geometrical Pictures, Kinds of Representation and Specific Processing", en R. Sutherland y J. Mason (eds.) *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education,* Springer Verlag, Alemania.

—— (1999), *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales,* Universidad del Valle, Colombia. [Traducido del original en francés de 1995, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Francia,* Peter Lang, traducción de Myriam Vega Restrepo.]

Healy, L., C. Hoyles, J.M. Laborde (eds.) (2001), *Teaching and Learning Dynamic Geometry,* número especial de *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* vol. 6, núm. 3, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers.

Hoyles, C., K. Jones (1998), "Proof in Dynamic Geometry Contexts", en C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* Países Bajos, Kluwer Academic Publishers.

Jones, K., A. Gutiérrez, M.A. Mariotti (eds.) (2000), *Proof in Dinamyc Geometry Environments,* número especial de *Educational Studies in Mathematics,* vol. 44, núms. 1-2, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C. y J.M. Laborde (1995), "What About a Learning Environment where Euclidian Concepts are Manipulated with a Mouse?", en A.A. DiSessa, C. Hoyles, R. Noss y L.D. Edwards, *Computers and Exploratory Learning,* Springer Verlag, Alemania.

Sánchez, E., M. Mercado (2002), "Writing Conjectures in Geometrical Activities with Cabri-Géomètre", *Proceedings of the XXIV Conference of North America Chapter of the International Group of the Psychology of Mathematics Education,* Georgia, Estados Unidos, pp. 767-774.

DATOS DEL AUTOR

Ernesto Sánchez Sánchez

Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, México

esanchez@mail.cinvestav.mx